Билет 1

1. Задача принятия решения при наличии бинарного отношения.

2. Решить игру с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_i > 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$

3. Решить игру Γ_1 для игры Γ с функциями выигрыша

$$F(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y,\ G(x, y) \equiv 1,\ X = [0, 1], Y = [0, 1].$$

Билет 2

1. Представление множества оптимальных по Слейтеру стратегий с использованием свертки типа 'минимум'.

2. Найти равновесие по Штакельбергу в игре с функциями выигрыша

$$F(x,y) = x - 2xy, G(x,y) = -(x-2y)^2 + 2x,\ X = [0,2], Y = [0,1].$$

3. Найти все ситуации равновесия в чистых и смешанных стратегиях биматричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Билет 3

1. Графический метод решения матричных игр вида $2 \times n$ и $m \times 2$.

2. На плоскости множество X является объединением трех множеств: прямоугольника с вершинами $(0,0), (1,0), (0,2), (1,2)$, квадрата с вершинами $(1,0), (2,0), (1,1), (2,1)$ и треугольника с вершинами $(1,1), (3/2,1)$, $(1,3/2)$. Найти множества стратегий из X, оптимальных по Парето и по Слейтеру для векторного критерия $W(x) = (W_1(x), W_2(x)) = (x_1, x_2)$.

3. Доказать, что смешанные стратегии $\varphi^0 = (2/3)I_0 + (1/3)I_1$ и $\psi^0 = (2/3)I_0 + (1/3)I_1$ являются оптимальными в игре

$$F(x,y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y,\ X = [0,1], Y = [0,1].$$

Найти значение игры v.

Билет 4

1. Сведение решения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования.

2. В игре s лиц функции выигрыша всех игроков совпадают и равны функции $F(x)$, непрерывной на произведении $X = X_1 \times ... \times X_s$ компактов метрических пространств. Доказать существование ситуации равновесия.

3. Найти оптимальное распределение ресурса в задаче максимизации функции

$$\min\left[\frac{x_1}{2} + 3, x_2 + 5, x_3 + 8, \frac{x_4}{2} + 32\right]$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23,\ x_i \geqslant 0,\ x_i - \text{ целые}, i = 1, 2, 3, 4.$$

Билет 5

1. Основная теорема матричных игр.

2. Решить игру Γ_1 для биматричной игры с $n \times n$-матрицами

$$A = (a_{ij}),\ a_{ij} = (2i - j)^2,\ B = (b_{ij}),\ b_{ij} = \begin{cases} 1, & i \leqslant j, \\ 0, & i > j. \end{cases}.$$

3. Пусть $i \in \{1, 2\}$ – контролируемый фактор, $j \in \{1, 2\}$ – стратегия противника, $k \in \{1, 2\}$ – случайный фактор, принимающий значения 1 и 2 с вероятностью 1/2. Критерий эффективности $F(i, j, k)$ задается двумя матрицами

$$(F(i, j, 1)) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ (F(i, j, 2)) = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Оперирующая сторона будет иметь информацию о неопределенном и случайном факторе в начале операции, противник не знает реализации случайного фактора. Найти наилучший гарантированный результат и все оптимальные стратегии оперирующей стороны.

Билет 6

1. Основная теорема непрерывных игр.

2. Найти все ситуации в чистых стратегиях, оптимальные по Парето в биматричной игре

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 7 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Даны две матрицы $A^1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Рассмотрим следующую игру с полной информацией. Сначала первый игрок выбирает номер матрицы $k \in \{1, 2\}$. Затем второй игрок выбирает номер столбца j матрицы A^k, а потом первый, зная j, выбирает номер строки i матрицы A^k. Выигрыш первого при этом равен a^k_{ij}. Найти значение игры и все оптимальные стратегии игроков.

Билет 7

1. Теоремы о доминировании строк и столбцов в матричных играх.

2. Найти ситуацию равновесия в смешанных стратегиях в биматричной игре

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix},$$

где $a, c > b, d,\ f, g > e, h.$

3. Найти оптимальное распределение ресурса в задаче минимизации функции

$$\frac{x_1^2}{8} - 2x_1 + \frac{x_2^2}{4} - 5x_2 + \frac{x_3^2}{2} - 7x_3 + \frac{x_4^2}{8} - 8x_4$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29,\ x_i \geqslant 0,\ x_i - \text{целые},\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Билет 8

1. Исследование модели 'нападение-защита' в чистых стратегиях.

2. Пусть в биматричной игре для смешанных стратегий p^0, q^0 и двух чисел v_1 и v_2 выполнены соотношения

$$A(i, q^0) \leqslant v_1,\ i = 1, ..., m,\ B(p^0, j) \leqslant v_2,\ j = 1, ..., n,$$

$$p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = v_1,\ q_j^0 > 0 \Rightarrow B(p^0, j) = v_2.$$

Доказать, что (p^0, q^0) – ситуация равновесия.

3. Найти оптимальное распределение ресурса в задаче максимизации функции

$$\min\left[\frac{x_1}{2} + 32, x_2 + 8, x_3 + 5, \frac{x_4}{2} + 3\right]$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23,\ x_i \geqslant 0,\ x_i - \text{целые},\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Билет 9

1. Исследование модели шумной дуэли.

2. На плоскости задано множество вида

$$X = \{x = (x_1, x_2) | (x_1/2)^2 + (x_2/3)^2 \leqslant 5\}.$$

Найти множество стратегий $x \in X$, оптимальных по Парето для векторного критерия $W(x) = (W_1(x), W_2(x)) = (x_1, x_2)$. Ответ обосновать.

3. Найти все ситуации равновесия в чистых и смешанных стратегиях биматричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Билет 10

1. Определение многошаговой антагонистической игры с полной информацией.

2. Найти все ситуации в чистых стратегиях, оптимальные по Слейтеру в биматричной игре

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 7 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Найти нижнее значение и максиминную стратегию в игре

$$F(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y,\ X = [0, 1], Y = [0, 1].$$

Билет 11

1. Теорема Цермело о решении многошаговой игры с полной информацией.

2. Найти все равновесия по Штакельбергу для биматричной игры с $n \times n$-матрицами

$$A = (a_{ij}), a_{ij} = i - j,\ B = (b_{ij}), b_{ij} = \begin{cases} 1, & i \leqslant j, \\ 0, & i > j. \end{cases}.$$

3. Пусть $i \in \{1, 2\}$ – контролируемый фактор, $j \in \{1, 2\}$ – стратегия противника, $k \in \{1, 2\}$ – случайный фактор, принимающий значения 1 и 2 с вероятностью 1/2. Критерий эффективности $F(i, j, k)$ задается двумя матрицами

$$(F(i,j,1)) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ (F(i,j,2)) = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Оперирующая сторона будет иметь информацию о неопределенном и случайном факторе в начале операции, а противник знает реализацию случайного фактора. Найти наилучший гарантированный результат и все оптимальные стратегии оперирующей стороны.

Билет 12

1. Ситуация равновесия игры многих лиц и ее недостатки.

2. Рассмотрим две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij}) = (Ca_{ij})$, где константа $C > 0$. Доказать,что оптимальные смешанные стратегии игроков в играх с матрицами A и B совпадают, а значения игр связаны равенством $v(B) = Cv(A)$.

3. Рассмотрим следующую одношаговую игру с полной информацией. Сначала первый игрок выбирает $x \in X = [0, 1]$, затем второй игрок, зная x, выбирает $y \in Y = [0, 1]$. Выигрыш первого игрока определяется по функции $F(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y$. Найти значение игры и все оптимальные стратегии игроков.

Билет 13

1. Теорема существования ситуаций равновесия для игры многих лиц.

2. Рассмотрим две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij}) = (a_{ij} + C)$, где C – некоторая константа Доказать,что оптимальные смешанные стратегии игроков в играх с матрицами A и B совпадают, а значения игр связаны равенством $v(B) = v(A) + C$.

3. Рассмотрим следующую одношаговую игру с полной информацией. Сначала второй игрок выбирает $y \in Y = [0, 1]$, затем первый игрок, зная y, выбирает $x \in X = [0, 1]$. Выигрыш первого игрока определяется по функции $F(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y$. Найти значение игры и все оптимальные стратегии игроков.

Билет 14

1. Решение антагонистических игр с вогнутыми и выпуклыми функциями выигрыша.

2. На столе лежат n спичек. Игроки по очереди (начиная с первого игрока) берут одну, две или три спички. Кто забирает последние спички, тот выигрывает. Пусть $n = 50$. Кто из игроков выигрывает? Укажите его оптимальную стратегию.

3. Найти оптимальное распределение ресурса в задаче минимизации функции

$$\max\left[\frac{2}{x_1+2}, \frac{4}{x_2+1}, \frac{5}{x_3+1}, \frac{56}{x_4+2}\right]$$

при ограничениях

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 22,\ x_i \geqslant 0,\ x_i - \text{целые},\ i = 1,2,3,4.$$

Билет 15

1. Определение антагонистической игры и ее решения.

2. Решить игру Γ_1 с функциями выигрыша

$$F(x,y) = x - 2xy,\ G(x,y) = -(x-2y)^2 + 2x,\ X = [0,2], Y = [0,1].$$

3. Найти оптимальное распределение ресурса в задаче максимизации функции

$$\ln(x_1 + 32) + \ln(x_2 + 49/2) + \ln(x_3 + 25/2) + \ln(x_4 + 2)$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29,\ x_i \geqslant 0,\ x_i - \text{целые},\ i = 1,2,3,4.$$

Билет 16

1. Теорема о необходимом и достаточном условии существования седловой точки. Метод поиска седловых точек.

2. Найти равновесие по Штакельбергу в игре с функциями выигрыша

$$F(x,y) = x - 2xy,\ G(x,y) = -(x-2y)^2 + 2x,\ X = [0,2], Y = [0,1].$$

3. Найти оптимальное распределение ресурса в задаче максимизации функции

$$\ln(x_1 + 2) + \ln(x_2 + 25/2) + \ln(x_3 + 49/2) + \ln(x_4 + 32)$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29,\ x_i \geqslant 0,\ x_i - \text{ целые}, i = 1,2,3,4.$$

Билет 17

1. Условия существования максиминных и минимаксных стратегий.

2. Игроки по очереди (начиная с первого) выбирают числа из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Числа последовательно складываются. Игрок выигрывает, если при добавлении его числа сумма стала равной 100. Кто из игроков выигрывает и какова его оптимальная стратегия?

3. Найти оптимальное распределение ресурса в задаче минимизации функции

$$\frac{x_1^2}{8} - 8x_1 + \frac{x_2^2}{2} - 7x_2 + \frac{x_3^2}{4} - 5x_3 + \frac{x_4^2}{8} - 2x_4$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29,\ x_i \geqslant 0,\ x_i - \text{ целые}, i = 1, 2, 3, 4.$$

Билет 18

1. Теорема существования седловой точки у вогнуто-выпуклой функции.

2. Игроки по очереди (начиная с первого) выбирают числа из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Числа последовательно складываются. Игрок проигрывает, если при добавлении его числа сумма превзошла 100. Кто из игроков выигрывает и какова его оптимальная стратегия?

3. Найти оптимальное распределение ресурса в задаче минимизации функции

$$\max\left[\frac{56}{x_1+2}, \frac{5}{x_2+1}, \frac{4}{x_3+1}, \frac{2}{x_4+2}\right]$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22,\ x_i \geqslant 0,\ x_i - \text{целые},\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Билет 19

1. Исследование модели 'нападение-защита' в смешанных стратегиях.

2. Рассмотрим одношаговую игру с полной информацией. Сначала второй игрок выбирает номер столбца j матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

а потом первый игрок, зная j, выбирает номер строки i этой матрицы, Выигрыш первого игрока равен a_{ij}. Найти значение игры и все оптимальные стратегии игроков.

3. Найти оптимальное распределение ресурса в задаче минимизации функции

$$\max\left[\frac{2}{x_1+2}, \frac{4}{x_2+1}, \frac{5}{x_3+1}, \frac{56}{x_4+2}\right]$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22,\ x_i \geqslant 0,\ x_i - \text{целые},\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Билет 20

1. Смешанное расширение антагонистической игры.

2. На плоскости задано множество вида

$$X = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \leqslant 5, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}.$$

Найти множество стратегий $x \in X$, оптимальных по Парето по векторному критерию $W(x) = (W_1(x), W_2(x)) = (x_1, x_2)$. Ответ обосновать.

3. Найти все ситуации равновесия в чистых и смешанных стратегиях биматричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Билет 21

1. Алгоритм поиска на конечном множестве оптимальных по Парето стратегий. Почему после завершения алгоритма множество П совпадает с $P(X, W)$?

2. Может ли 6×6-матрица, состоящая из 0 и 1, иметь ровно 12 седловых точек? Ответ обосновать.

3. Найти равновесие по Штакельбергу для игры Г с функциями выигрыша

$$F(x, y) = -2x^2 + xy - 4y^2 + 2x + y, \; G(x, y) = -2x^2 + 4xy + y^2 - x + y,$$

$$X = [-3, 1], \; \; Y = [-2, 2].$$

Билет 22

1. Метод сужения множества оптимальных по Парето стратегий на основе информации о сравнительной важности или равноценности критериев.

2. Может ли 11×11-матрица иметь ровно 50 седловых точек? Ответ обосновать.

3. Решить игру Γ_2 для игры Γ с функциями выигрыша

$$F(x,y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y,\ G(x,y) \equiv 1,\ X = [0,1], Y = [0,1].$$

Билет 23

1. Задача сужения множества оптимальных по Парето стратегий для равноценных критериев.

2. Найти седловую точку функции $F(x, y) = (x - 2y)^2 - x^2 + 3x$ на произведении $X \times Y$, где $X = [0, 3], Y = [0, 3]$.

3. Найти все ситуации равновесия в чистых и смешанных стратегиях биматричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Билет 24

1. Математическая модель операции.

2. Доказать, что для наилучших гарантированных выигрышей первого игрока в играх Γ_1 и Γ_2 выполнено неравенство $F_1 \leqslant F_2$.

3. Найти верхнее значение и минимаксную стратегию в игре

$$F(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y, \ X = [0, 1], Y = [0, 1].$$

Билет 25

1. Оценка эффективности стратегии (в том числе смешанной) в операции.

2. Найти седловую точку функции $F(x, y) = (x - 2y)^2 - 2x^2 + 6x$ на произведении $X \times Y$, где $X = [0, 3], Y = [0, 2]$.

3. Найти оптимальную стратегию и наилучший гарантированный результат первого игрока в игре Γ_2, где Γ – биматричная игра с $n \times n$-матрицами $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, где

$$a_{ij} = i + j,\ b_{ij} = (i - j)^2,\ i = 1, ..., n, j = 1, ..., n.$$

Билет 26

1. Вид наилучшего гарантированного результата в случае, когда во множестве стратегий существуют абсолютно-оптимальные стратегии.

2. Найти все ситуации равновесия в биматричной игре с $n\times n$-матрицами $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, где

$$a_{ij} = (i-j)^2,\ b_{ij} = (i-j)^2,\ i = 1, ..., n, j = 1, ..., n.$$

3. Доказать, что смешанные стратегии $\varphi^0 = (2/3)I_0 + (1/3)I_1$ и $\psi^0 = (2/3)I_0 + (1/3)I_1$ являются оптимальными в игре

$$F(x,y) = x^2 - 2x + 3xy - y^2,\ X = [0,1], Y = [0,1].$$

Найти значение игры v.

Билет 28

1. Необходимые условия оптимальности для максиминной стратегии из отрезка и следствия.

2. Найти равновесие по Штакельбергу в игре Γ_1, где Γ – биматричная игра с $n \times n$-матрицами $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, где n – четно и

$$a_{ij} = i + j,\ b_{ij} = (i - j)^2,\ i = 1, ..., n, j = 1, ..., n.$$

3. Найти верхнее значение и минимаксную стратегию в игре

$$F(x, y) = x^2 - 2x + 3xy - y^2,\ X = [0, 1], Y = [0, 1].$$